



**A LEI DE GAUSS PARA UMA PARTÍCULA CARREGADA EM MOVIMENTO
UNIFORME: UMA PROPOSTA DE EXERCÍCIO PARA ALUNOS DE
LICENCIATURA EM FÍSICA DA FACULDADE ÚNICA DE IPATINGA**

**GAUSS' LAW FOR A CHARGED PARTICLE IN UNIFORM MOTION: AN EXERCISE
PROPOSAL FOR STUDENTS OF GRADUATION STUDENTS IN PHYSICS AT
FACULDADE ÚNICA DE IPATINGA**

DINIZ, Alan Corrêa¹

RESUMO: Este trabalho pretende responder à seguinte pergunta: "A Lei de Gauss para o fluxo de campo elétrico continua sendo válida caso a carga geradora do campo estivesse se movendo uniformemente, com velocidade próxima à da luz?". Pode-se inclusive interpretar essa pergunta como sendo natural, uma vez que a Lei de Gauss é definida em termos do fluxo de campo elétrico de uma fonte geradora estática, em um referencial em repouso absoluto. Entretanto, caso a fonte geradora do campo (uma partícula carregada, por exemplo) estivesse se movendo uniformemente com relação a um referencial inercial, estaríamos ainda em uma situação de equilíbrio, uma vez que os referenciais não estão acelerados entre si. A resposta a essa questão evidencia também como o campo elétrico se comporta no limite relativístico, sendo um interessante exercício sobretudo para alunos do curso de licenciatura em física da Faculdade Única nos períodos finais do curso.

PALAVRAS-CHAVE: Lei de Gauss. Campo elétrico relativístico. Relatividade especial. Partícula carregada relativística. Eletrodinâmica relativística.

ABSTRACT: This work intends to answer the following question: "Does Gauss' Law for the flow of electric field remain valid if the charge generating the field were moving uniformly, with a speed close to that of light?". One can even interpret this question as being natural, since Gauss' Law is defined in terms of the flux of the electric field of a static generating source, in a referential at absolute rest. However, if the source generating the field (a charged particle, for example) were moving uniformly with respect to an inertial frame of reference, we would still be in a situation of equilibrium, since the frames are not accelerated against each other. The answer to this question also shows how the electric field behaves in the relativistic limit, being an interesting exercise, especially for students of the degree course in physics in the final periods of the course.

KEYWORDS: Gauss Law. Relativistic electric field. Special relativity. Relativistic charged particle. Relativistic Electrodynamics.

¹ Licenciado em Física pela UFJF, Mestre em Física Atômica e Molecular pela UFJF, Mestre em Ensino de Física pela UFV e Doutorando em Física Teórica pela UFJF.

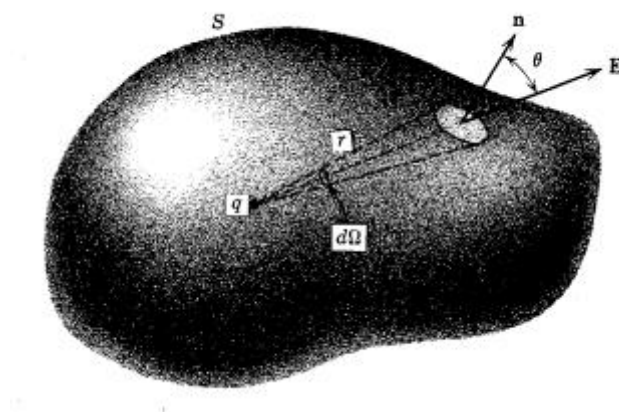
1. INTRODUÇÃO

A Lei de Gauss, elaborada no século XIX por Carl Friedrich Gauss (KNIGHT; p. 854), estabelece uma das mais importantes relações da eletrostática, determinando o cálculo do fluxo elétrico Φ_E através de uma superfície fechada, também chamada de superfície gaussiana (ver Figura 1). Em sua forma integral, no vácuo,

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

onde \vec{E} representa o vetor campo elétrico, $d\vec{a} = \hat{n}da$ representa o vetor perpendicular ao elemento infinitesimal de área da com \hat{n} sendo um vetor unitário, q a carga dentro da superfície gaussiana e $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$ a permissividade elétrica no vácuo.

Figura 1: Representação ilustrativa da superfície gaussiana S . Em seu interior, a carga total vale q .

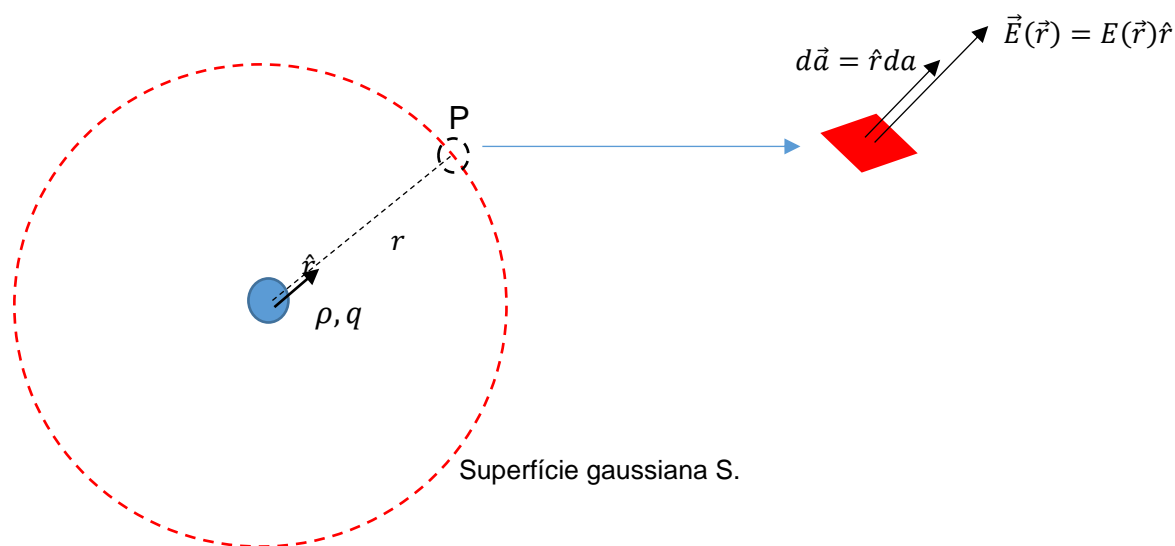


Fonte: JACSKSON, (1983, p. 23).

Em particular, vamos calcular o campo elétrico de uma configuração de cargas com densidade de carga elétrica ρ e carga q , localizada na origem, com

simetria esférica em um ponto P distante r dessa configuração, de acordo com a Figura 2:

Figura 2: Representação esquemática (em duas dimensões) de uma densidade de carga elétrica ρ encerrada em uma superfície gaussiana S. A uma distância r de ρ , no ponto P, calcularemos a intensidade do campo elétrico gerado pela distribuição de cargas com simetria esférica.



Fonte: autoria própria.

Utilizando a Lei de Gauss (equação 1) na situação proposta acima:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E(r)r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

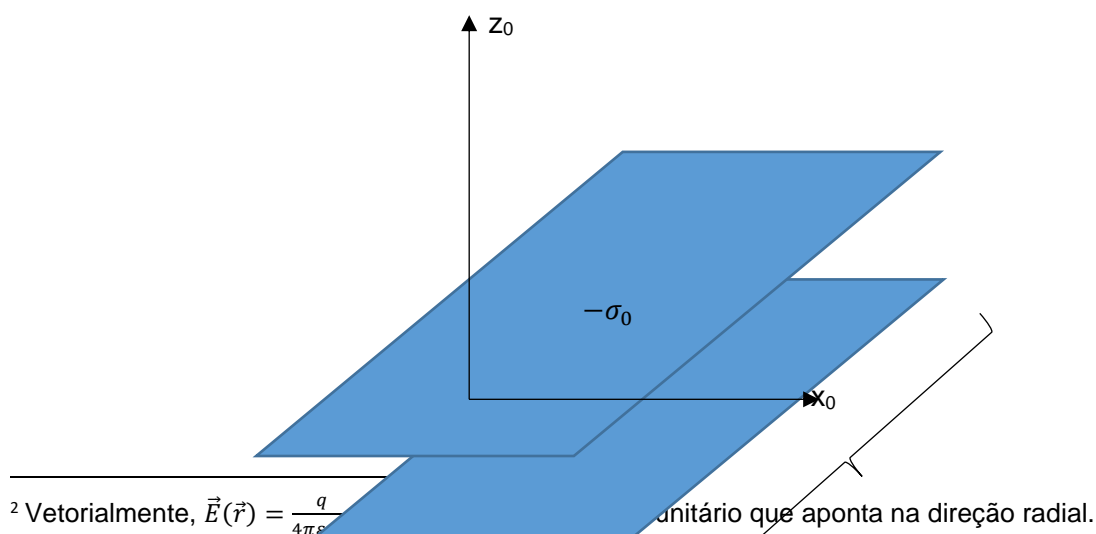
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

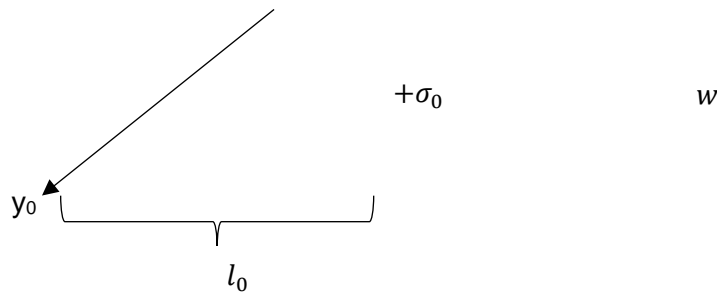
A expressão² (2), que representa o cálculo do campo elétrico de uma configuração de cargas com simetria esférica, já é amplamente conhecida em cursos das áreas de ciências exatas. No Sistema Internacional de Unidades (SI), sua unidade é N/C (newton/coulomb) ou V/m (volt/metro).

2. TRANSFORMAÇÃO RELATIVÍSTICA PARA CAMPOS ELÉTRICOS

Apesar de, em geral, os campos se transformarem quando o referencial é alterado, a carga permanece invariante, sendo uma propriedade fundamental da matéria, assim como a massa de repouso (GRIFFITHS; p. 366). Conseqüentemente, podemos então concluir que as regras de transformação não dependem da forma de como os campos foram produzidos, isto é, não dependem das fontes. Para ilustrar melhor essa situação, vamos considerar, inicialmente, um capacitor de placas planas paralelas num referencial S_0 no vácuo onde elas se encontram em repouso.

Figura 3: Representação esquemática de duas placas planas e paralelas carregadas com densidades superficiais de cargas $+\sigma_0$ e $-\sigma_0$, com dimensões l_0 e w .





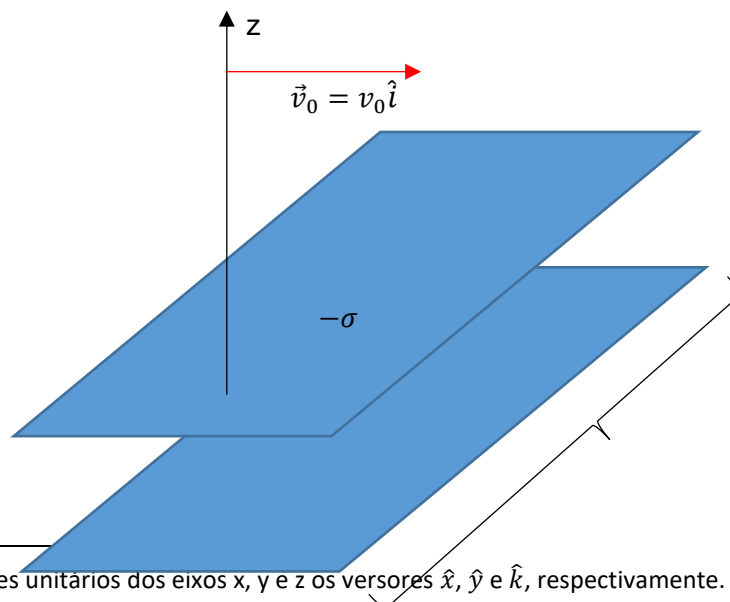
Fonte: autoria própria.

Neste referencial³, o campo elétrico entre as placas é dado por:

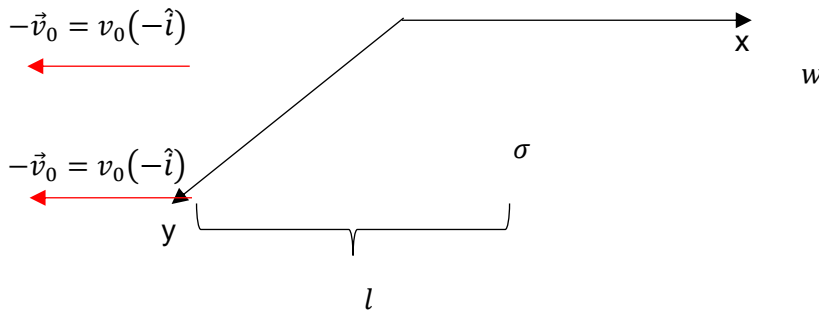
$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y} \quad (3)$$

Considere agora um referencial S que se desloca para a direita com velocidade constante v_0 . Neste referencial, as placas se deslocam para a direita com a mesma velocidade.

Figura 4: Representação esquemática das mesmas duas placas planas e paralelas carregadas, só que agora vistas por um outro referencial que se move para a direita com velocidade v_0 .



³ Considere como vetores unitários dos eixos x, y e z os versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{k} , respectivamente.



Fonte: autoria própria.

As densidades de cargas agora são $+\sigma$ e $-\sigma$, uma vez que na direção do movimento há contração de Lorentz: $l_0 = \gamma l$, com $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ e $\beta = v_0/c$. Com isso, analogamente ao que ocorre com a massa, $\sigma = \gamma\sigma_0$. O campo elétrico é então dado por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \quad (4)$$

Podemos concluir, então, que a relação entre os campos nos dois referenciais é dada por:

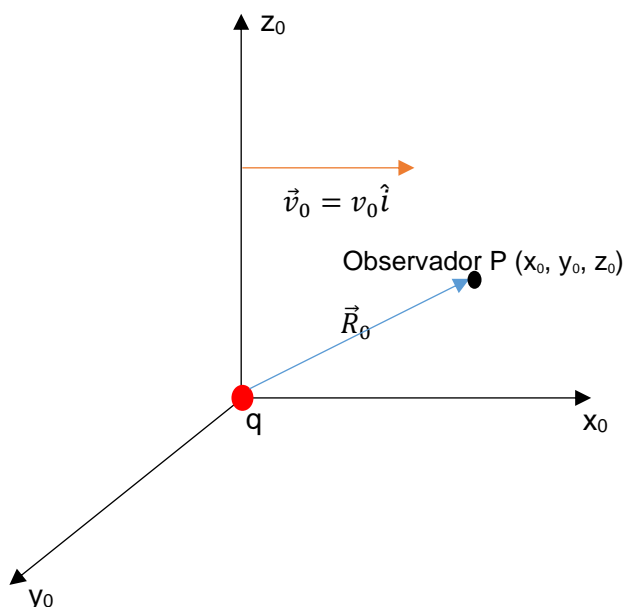
$$\vec{E}^\perp = \gamma \vec{E}_0^\perp \quad (5)$$

Em (5), nota-se que somente as direções perpendiculares ao movimento sofreram alterações. Quanto às componentes paralelas, elas não sofrem alterações. Para tal, basta imaginar as placas da Figura 3 rotacionadas em um ângulo de 90° em torno do eixo-z, ficando paralelas ao eixo-y. Em um referencial S que se move para a direita com velocidade constante v_0 , as duas dimensões das placas não são alteradas, logo, as componentes paralelas do campo elétrico não sofrem

alterações: $\vec{E}^{\parallel} = \vec{E}_0^{\parallel}$. Note também que partimos de um caso particular, ou seja, de um referencial S_0 onde não há campo magnético.

Diante do exposto, considere agora uma carga pontual em repouso, localizada na origem do sistema de coordenadas S_0 que se move com velocidade constante \vec{v}_0 com relação ao sistema S . Também no sistema S_0 , há um observador localizado em um ponto P , com coordenadas espaciais (x, y, z) .

Figura 5: Representação esquemática da carga pontual q localizada na origem de um sistema de coordenadas S_0 , bem com um observador localizado no ponto P .



Fonte: autoria própria.

O vetor posição do observador P é dado por $\vec{R}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$. Em módulo, $|\vec{R}_0| = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}$.

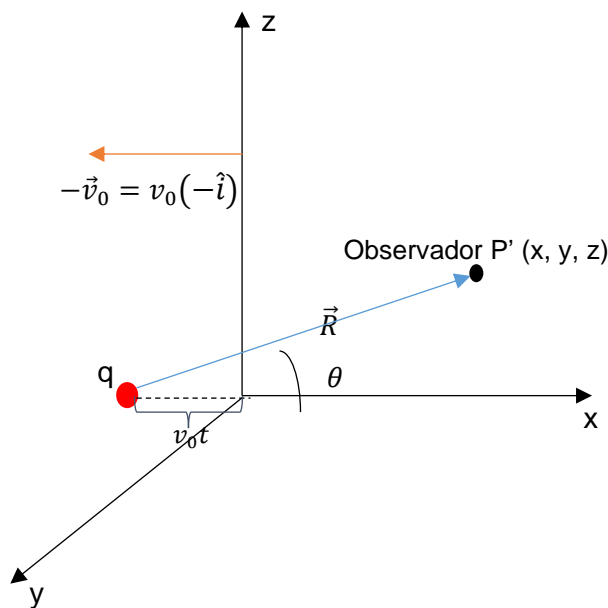
No ponto P , onde se encontra o observador, o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_0^3} \vec{R}_0$$

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_0^3} \vec{R}_0 \quad (6)$$

Agora, vamos buscarmos calcular o campo elétrico visto por um observador P' , localizado em um sistema de referência S com relação a S_0 :

Figura 6: Ilustração esquemática do observador P' em S . Pode-se observar também que a carga q moveu-se uma distância $v_0 t$ com relação a S_0 , sendo t o intervalo de tempo desse percurso. O ângulo entre o vetor posição \vec{R} e o eixo- x é θ .



Fonte: autoria própria.

Na situação ilustrada pela Figura 4, devemos levar em consideração os efeitos relativísticos ao calcularmos o campo elétrico no ponto P' , visto que $v_0 \sim c$.

Diante do que já sabemos, apenas as componentes perpendiculares ao campo são modificadas: $\vec{E}_y = \gamma \vec{E}_{0y}$ e $\vec{E}_z = \gamma \vec{E}_{0z}$. Para a componente x do campo elétrico, devemos lembrar que tal componente não é transformada devido ao fato

da mesma ser paralela à referida transformação, entretanto, a carga q sofre contração relativística dos espaços ao longo do eixo-x: $x_0 = \gamma(x + vt)$, onde convenientemente faremos $R_x \equiv (x + vt)$. Para os eixos y e z, sabemos que não há transformação das componentes espaciais, então faremos $y = y_0 \equiv R_y$ e $z = z_0 \equiv R_z$.

Observando melhor a Figura 4, tem-se que: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \gamma^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$, com $R_y^2 + R_z^2 = R^2 \text{sen}^2 \theta$, pois $R_x = R \cos \theta$ e $R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = R^2$. É possível então demonstrar que:

$$(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2} = \gamma^3 R^3 (1 - \beta^2 \text{sen}^2 \theta)^{3/2} \quad (7)$$

Conseqüentemente, o campo elétrico pode ser escrito como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \text{sen}^2 \theta)^{3/2}} q \frac{\hat{R}}{R^2} \quad (8)$$

com $\hat{R} = \vec{R}/|\vec{R}|$.

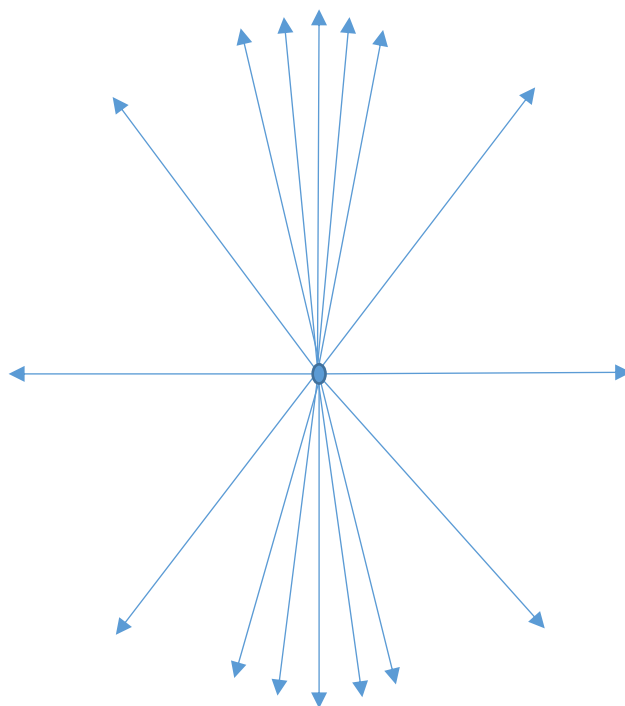
A equação (8) nos permite chegar a algumas importantes conclusões:

- A componente do campo elétrico E_x ganha um fator γ no numerador a partir da Transformação de Lorentz na coordenada x_0 .
- E_y e E_z ganham um fator γ no numerador a partir da transformação dos próprios campos.
- Como todas as componentes do campo elétrico ganham o mesmo fator, o sentido do campo não é distorcido após a transformação, isto é, o campo elétrico \vec{E} continua paralelo a \vec{R} .
- O campo elétrico sempre aponta no sentido da posição instantânea da carga.
- O fator $\text{sen}^2 \theta$ indica que:

- Se $\theta = 0^\circ$, o campo é reduzido por um fator $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$.
- Se $\theta = 90^\circ$, o campo é aumentado por um fator $1/\sqrt{1 - \beta^2} = \gamma$.

O fator $\sin^2\theta$ também mostra que as linhas de campo ficam mais acumuladas na direção perpendicular ao movimento, onde o campo é mais intenso.

Figura 7: Ilustração das linhas de campo elétrico mais acumuladas na direção perpendicular ao movimento devido ao fator $\sin^2\theta$.



Fonte: autoria própria.

Ao invés de "algo radial", nota-se uma tendência de acúmulo de linhas de acordo com a Figura 7.

3. APLICANDO A LEI DE GAUSS

Vamos então, agora, verificar se a Lei de Gauss pode ser aplicada à situação proposta. Integrando sobre uma esfera gaussiana centrada na carga q , usando a equação (1),

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

com a diferença de que agora o campo elétrico é o campo transformado explícito na equação (8), e com isso (lembrando que $\beta = v/c$):

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \text{sen}^2\theta)^{3/2}} qR^2 \text{sen}\theta d\theta d\varphi \frac{\hat{R} \cdot \hat{R}}{R^2}$$

onde faremos $k \equiv 1/4\pi\epsilon_0$. Consequentemente,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = kq(1 - \beta^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\text{sen}\theta d\theta}{(1 - \beta^2 \text{sen}^2\theta)^{3/2}}$$

resultando⁴ em:

$$k2\pi(1 - \beta^2)q \frac{2}{(1 - \beta^2)}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ao aplicarmos a Lei de Gauss para a carga q movendo-se a velocidade constante, próxima à da luz, e integrando o seu campo, encontramos como resultado q/ϵ_0 , validando então, a princípio, a Lei de Gauss. Entretanto, antes de

⁴ Consultar o Apêndice 1 para maiores detalhes sobre a resolução da integral.

concluirmos se a Lei de Gauss é válida ou não, necessitamos verificar se a carga q é de fato válida nos referenciais S e S_0 .

Sabemos que, em S_0 ,

$$\rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e que $\rho_0 = q/V_0$ no referencial em que q se encontra em repouso (S_0), sendo V_0 o volume onde a carga q está distribuída. Como ainda não temos certeza de que a carga q é conservada, vamos chamar de q' a carga "vista" em S . Então:

$$\rho' = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{q}{V_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Em S , a carga medida sofre contração em seu volume: $V' = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, com ρ' definido como $\rho' = q'/V'$, sendo V' o volume por onde q' está distribuído em S . Logo:

$$\frac{q'}{V'} = \frac{q}{V_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \leftrightarrow \frac{q'}{V_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{q}{V_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \leftrightarrow q' = q$$

Ou seja, como $q' = q$, a carga não se altera, logo, a Lei de Gauss é válida para uma partícula carregada em movimento retilíneo e uniforme.

4. CONCLUSÃO E ÚLTIMAS CONSIDERAÇÕES

Espera-se que o leitor tenha obtido uma compreensão sólida dos conceitos envolvidos na transformação de campos elétricos relativísticos ao final da leitura. Este trabalho tem a principal pretensão de ser um ponto de partida para estudos mais aprofundados, como por exemplo, a transformação relativística de campos elétricos e magnéticos.

Como sugestão de estudo, propõem-se ao leitor estudar os seguintes tópicos:

- Capítulos 11 e 12 de (GRIFFITHS; 2011);
- Capítulo 22 de (SEARS, ZEMANSKY; 2008);
- Capítulo 4 de (MACHADO; 2004).
- Capítulo 12 de (JACKSON, 1998).

Para estudos mais avançados, consultar o capítulo 4 de (LANDAU, LIFSHITZ; 1971) e os capítulos 11 e 12 de (SHAPIRO; 2018).

5. AGRADECIMENTOS

Ao professor Ilya L. Shapiro, que através de suas aulas na disciplina Teoria Eletromagnética IV, no curso de doutorado em física (segundo semestre de 2022) ajudou-me a esclarecer diversas dúvidas acerca do assunto, sempre me orientando ao caminho correto.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GRIFFITHS, D.J. **Eletrodinâmica**. Tradução: Heloisa Coimbra de Souza. 3. ed. São Paulo: editora Pearson, 2011. 424 p.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. Califórnia: editora Wiley, 1998. 832 p.

LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M.; (1971) **The Classical Theory of Fields**. 2. ed. Nova York: editora Pergamon Press, 1971. 374 p. v. 2.

MACHADO, K. D.; **Teoria do Eletromagnetismo Volume I**. 1. ed. Ponta Grossa: editora UEPG, 2004. 929 p. v. 1.

SEARS, F.; YOUNG, H. D.; ZEMANSKY, M.W. **Física III**. 12. ed., São Paulo: editora PEARSON, 2008. v.8. 448 p.

SHAPIRO, I.L; **A Primer in Tensor Analysis and Relativity**. 1. ed. Juiz de Fora: editora Springer, 2019. 324 p.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. Califórnia: editora Wiley, 1998. 832 p.

7. APÊNDICE: SOLUCIONANDO A INTEGRAL

O objetivo deste apêndice é apresentar uma maneira de resolver a seguinte integral:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = kq(1 - \beta^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\text{sen}\theta d\theta}{(1 - \beta^2 \text{sen}^2\theta)^{3/2}} \quad (i)$$

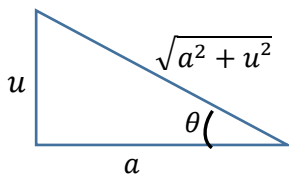
com $k \equiv 1/4\pi\epsilon_0$, $\beta = v/c$ e $d\vec{a} = R^2 \text{sen}\theta d\theta d\varphi \hat{R}$. Continuando:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = k2\pi q(1 - \beta^2) \int_0^\pi \frac{\text{sen}\theta d\theta}{(1 - \beta^2 \text{sen}^2\theta)^{3/2}}$$

onde, na equação acima, vamos primeiramente efetuar uma mudança de variáveis para resolver a integral do lado direito da equação: $u = \cos\theta$; $du = -\text{sen}\theta d\theta$, conseqüentemente $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - u^2$. Quanto aos limites da integral, serão substituídos por $u(\theta = 0) = \cos 0 = 1$ e $u(\theta = \pi) = \cos \pi = -1$. Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{du}{(1 - \beta^2(1 - u^2))^{3/2}} &= \int_{-1}^1 \frac{du}{(1 - \beta^2 + \beta^2 u^2)^{3/2}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\left[\beta^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 + u^2\right)\right]^{3/2}} \\ &= (c/v)^3 \int_{-1}^1 \frac{du}{\left[\left(\frac{c^2}{v^2} - 1 + u^2\right)\right]^{3/2}} = (c/v)^3 \int_{-1}^1 \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Agora, é necessário utilizar substituição trigonométrica para prosseguirmos com a resolução de uma integral do tipo $\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}$. Sabendo disso, vamos fazer a seguinte substituição tomando como referência um triângulo retângulo com suas medidas dadas em função de a e u :



Onde:

$$tg\theta = \frac{u}{a}, u = atg\theta$$

$$du = a \sec^2\theta d\theta$$

Logo, a integral do

tipo

$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}$ se transforma em:

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \int \frac{a \sec^2\theta d\theta}{[a^2(1 + tg^2\theta)]^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \cos\theta d\theta = \frac{1}{a^2} \text{sen}\theta + \text{constante}$$

Utilizando os limites $u(\theta = 0) = \cos 0 = 1$ e $u(\theta = \pi) = \cos \pi = -1$ no resultado da integral acima e voltando nas coordenadas u e a :

$$\frac{1}{a^2} \frac{u}{(a^2 + u^2)^{1/2}} \Big|_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{a^2} \frac{2}{(a^2 + 1)^{1/2}}$$

Substituindo o resultado acima em (i) e lembrando que $a^2 = c^2/v^2 - 1$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = k2\pi q(1 - \beta^2) (c/v)^3 \frac{2}{\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right)} \frac{1}{\left(\frac{c^2}{v^2}\right)^{1/2}} = k2\pi q(1 - \beta^2) \frac{2(c/v)^3}{\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right) \left(\frac{c}{v}\right)}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $(v/c)^3$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = k2\pi q(1 - \beta^2) \frac{2}{1 - \beta^2} = k4\pi q$$

Lembrando novamente que $k \equiv 1/4\pi\epsilon_0$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Como queríamos demonstrar.